Неразрешимое итеративное пропозициональное исчисление

Боков Г.В.

23 апреля 2015 г.

Аннотация

В данной работе рассматриваются итеративные пропозициональные исчисления, представляющие собой конечные множества пропозициональных формул вместе с операцией *modus ponens* и операцией суперпозиции, заданной множеством операций Мальцева. Для таких исчислений изучается вопрос разрешимости проблемы выводимости формул. В работе построено неразрешимое итеративное пропозициональное исчисление, аксиомы которого зависят от трех переменных. Вывод формул в данном исчислении моделирует процесс решение проблемы соответствий Поста. В частности, в работе доказано, что общая проблема выразимости для итеративных пропозициональных исчислений алгоритмически неразрешима.

Ключевые слова: Итеративное пропозициональное исчисление, проблема выводимости, проблема выразимости, проблема соответствий Поста.

Введение

Пропозициональное исчисление в общем виде представляет собой пару — конечное множество пропозициональных формул в некоторой сигнатуре и множество операций над этими формулами. Вопрос о разрешимости таких исчислений впервые был поставлен Тарским [15] в 1946 году.

В классическом подходе в качестве операций вывода в пропозициональных исчислениях выступают операция *modus ponens* (из формул A и $A \to B$ выводима формула B) и операция *подстановки* (из формулы $A(x)$ выводима формула $A(B)$ для любой формулы B). Существование неразрешимого пропозиционального исчисления, а также алгоритмическая неразрешимость многих проблем для классического исчисления высказываний была впервые установлена в 1949 году Линиалом и Постом [12]. Аналогичные результаты для интуиционистского исчисления высказываний были получены Кузнецовым [3] в 1963 году. Исторический обзор корпуса алгоритмически неразрешимых проблем для классических пропозициональных исчислений можно найти в [9, 10]. В частности, в [10] приведен исторический обзор методов доказательства неразрешимых свойств таких исчислений.

Анализ моделирования алгоритмически неразрешимых проблем с помощью классических пропозициональных исчислений [10] показал, что оно по большому счету основывается на наличии в исчислениях операции подстановки. Без операции подстановки

не удается смоделировать ни одну алгоритмически неразрешимую проблему. С другой стороны, если рассмотреть функциональные системы конечнозначных функций, где вместо операции подстановки используется более слабая *операция суперпозиции*, обычно задаваемая совокупностью операций Мальцева [2], то нельзя не обратить внимание на то, что большинство проблем для этих систем, наоборот, алгоритмически разрешимы. Эти наблюдения заставляют задуматься о необходимости использования операции подстановки вместо более слабой операции суперпозиции.

Как отмечает Циткин в [11], в 1965 году Кузнецов [4] впервые ввел в рассмотрение операцию *слабой подстановки* (из формул $A(x)$ и B выводима формула $A(B)$) как правило вывода в исчислениях. В [5, 6] данное правило и правило замены эквивалентным использовались для определения выразимости формул в той или иной логике относительной некоторой системы формул. Поскольку слабую подстановку можно представить в виде конечной последовательности операций Мальцева, то в [1] данную операцию было принято назвать операцией суперпозиции формул, а исчисления, в которых вместо операции подстановки используется операция суперпозиции, — итеративными, ввиду их схожести с итеративными алгебрами Поста, введенными Мальцевым [8].

В данной работе будет показано, что ослабление операции подстановки не позволяет полностью избавиться от неразрешимости исчислений. В частности, будет построено итеративное пропозициональное исчисление с неразрешимой проблемой выводимости формул, что доказывает алгоритмическую неразрешимость общей проблемы выразимости для таких исчислений.

Определения и основные результаты

Для начала напомним некоторые понятия. Рассмотрим язык, состоящий из счетного множества пропозициональных переменных $\mathcal{V}$ и конечное множество логических связок Σ, которое будем называть сигнатурой. Буквами x, y, p будем обозначать переменные. Как правило, логические связки унарные или бинарные, например, $\neg$, $\vee$, $\wedge$ или $\to$.

Пропозициональные формулы или Σ-*формулы* строятся из логических связок Σ и переменных $\mathcal{V}$ обычным образом. Например, следующие обозначения

$$x, \quad \neg A, \quad (A \vee B), \quad (A \wedge B), \quad (A \to B)$$

являются формулами в сигнатуре $\{\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \to\}$. Заглавные буквы A, B, C будут использоваться для обозначения формул. Далее условимся опускать внешние скобки, а также скобки, однозначно восстанавливаемые из частичного порядка логических связок.

Итеративное пропозициональное исчисление P над множеством логических связок Σ это пара, состоящая из конечного множества Σ-формул P, называемых *аксиомами*, и двух правил вывода:

1) *modus ponens*

$$A, A \to B \vdash B;$$

2) *суперпозиция* (совокупность операций Мальцева)

$$A(x), B \vdash A(B).$$

Обозначим через $[P]$ множество выводимых (или доказуемых) формул исчисления P. *Вывод* в P из аксиом с помощью правил вывода определяется обычным образом. Выводимость формулы A из P будем обозначать через $P \vdash A$.

Исчисление $\mathcal{P}$ будем называть *разрешимым*, если существует алгоритм, который по произвольной формуле A отвечает на вопрос: $P \vdash A$? Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Существует неразрешимое итеративное пропозициональное исчисление.*

Определим на множестве всех пропозициональных исчислений предпорядок. Будем писать $P_1 \leq P_2$ (или $P_2 \geq P_1$), если каждая выводимая в P_1 формула также выводима в P_2, т.е. $[P_1] \subseteq [P_2]$. *Проблема выразимости* для пропозициональных исчислений состоит в следующем: по двум исчислениям P_1 и P_2 требуется ответить на вопрос $P_1 \leq P_2$? Как следствие из Теоремы 1 имеем.

Следствие 1. *Проблема выразимости для итеративных пропозициональных исчислений алгоритмически неразрешима.*

Доказательство основного результата

Прежде чем доказывать основной результат, мы напомним проблему соответствий Поста. Далее мы закодируем слова конечного алфавита пропозициональными формулами и формально докажем сведения проблемы соответствий Поста к проблеме вывода формул в построенном итеративном исчислении.

Проблема соответствий Поста

Рассмотрим конечный алфавит $\mathcal{A}$, содержащий по крайней мере два символа. Обозначим через $\mathcal{A}^+$ множество непустых слов в алфавите $\mathcal{A}$. *Проблема соответствий Поста* [14] для алфавита $\mathcal{A}$ состоит в следующем. Для последовательности Π пар непустых слов в алфавите $\mathcal{A}$

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_\mu, \beta_\mu)$$

требуется определить, существуют ли такое натуральное число $N \geq 1$ и такие индексы $i_1, \ldots, i_N \in \{1, \ldots, \mu\}$, что выполнено тождество

$$\alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_N} = \beta_{i_1}\beta_{i_2} \ldots \beta_{i_N}.$$

Факт существования такого решения будем обозначать через $\Pi \downarrow$.

Для наглядности рассмотрим следующий пример. Пусть дан алфавит $\{a, b\}$ и три пары непустых слов из данного алфавита

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3),$$

где $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = ab$, $\alpha_3 = bba$ и $\beta_1 = baa$, $\beta_2 = aa$, $\beta_3 = bb$. Тогда одним из решений проблемы соответствий Поста для данной последовательности будет $N = 4$ и индексы $i_1 = 3$, $i_2 = 2$, $i_3 = 3$, $i_4 = 1$:

$$\alpha_3\alpha_2\alpha_3\alpha_1 = bba + ab + bba + a = bbaabbbaa = bb + aa + bb + baa = \beta_3\beta_2\beta_3\beta_1.$$

Поскольку далее мы будем сводить данную проблему к проблеме выводимости формул в итеративных исчислениях, то нам будет удобно определить аналог вывода решения из последовательности пар слов Π. Для начала введем несколько вспомогательных конструкций.

Рассмотрим две пары (α, β) и (ξ, ζ) слов в алфавите $\mathcal{A}$. Будем говорить, что пара (α, β) *элементарно выводима* в Π из пары (ξ, ζ), если найдется такое $i \in \{1, \ldots, \mu\}$, что

$$\alpha = \alpha_i \xi \ \text{ и } \ \beta = \beta_i \zeta.$$

Факт элементарной выводимости (α, β) из (ξ, ζ) будем записывать как

$$(\xi, \zeta) \xrightarrow{\Pi} (\alpha, \beta).$$

Расширим понятие выводимости пар слов по транзитивности. Будем назовем пару (α, β) *выводимой* в Π из пары (ξ, ζ) и записывать это как

$$(\xi, \zeta) \overset{\Pi}{\Longrightarrow} (\alpha, \beta),$$

если существует последовательность пар слов $(\xi 1, \zeta 1), \ldots, (\xi n, \zeta n)$ такая, что

1. $\xi_1 = \xi$ и $\zeta_1 = \zeta$,
2. $\xi_n = \alpha$ и $\zeta_n = \beta$,
3. $(\xi_i, \zeta_i) \xrightarrow{\Pi} (\xi_{i+1}, \zeta_{i+1})$ для всех $1 \leq i \leq n - 1$.

Последовательность пар $(\xi 1, \zeta 1), \ldots, (\xi n, \zeta n)$ с данными свойствами будем называть *выводом* пары (α, β) из пары (ξ, ζ) в Π. По определению будем считать, что $(\alpha, \beta) \overset{\Pi}{\Longrightarrow} (\alpha, \beta)$ для любой пары слов (α, β).

Будем говорить, что пара слов (α, β) в алфавите $\mathcal{A}$ *выводима* из Π и записывать это как

$$\Pi \ \vdash \ (\alpha, \beta),$$

если (α, β) выводима в Π из $(\varepsilon, \varepsilon)$, т.е.

$$(\varepsilon, \varepsilon) \overset{\Pi}{\Longrightarrow} (\alpha, \beta),$$

где ε — это пустое слово.

Чтобы провести полную аналогию с выводом формул в пропозициональных исчислениях, определим оператор замыкания множества пар слов Π. Обозначим через $[\Pi]$ множество всех пар слов, выводимых из Π:

$$[\Pi] := \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^+ \times \mathcal{A}^+ \mid \Pi \ \vdash \ (\alpha, \beta)\}.$$

Несложно убедиться, что $[\cdot]$ является оператором замыкания.

В 1946 году Пост доказал, что проблема соответствий Поста алгоритмически неразрешима.

Теорема 2 (Пост)**.** *Не существует алгоритма, решающего проблему соответствий Поста для алфавита $\mathcal{A}$.*

Он нашел эффективный способ задания однородных систем продукций Поста [13] последовательностями пар непустых слов Π в двубуквенном алфавите. Поскольку существует система однородных продукций Поста с алгоритмически неразрешимой проблемой остановки [7], то тем самым доказано существование множества пар Π, для которого множество выводимых пар $[\Pi]$ неразрешимо, т.е. не существует алгоритма, которой по произвольной паре слов (α, β) отвечал бы на вопрос, выводима ли (α, β) из множества пар Π, т.е. $\Pi \ \vdash \ (\alpha, \beta)$. Таким образом, верна следующая теорема, которая понадобится нам в дальнейшем.

Теорема 3. *Существует множество непустых пар слов* Π *в алфавите* $\mathcal{A}$, *для которого множество* $[\Pi]$ *неразрешимо.*

Кодирование букв и слов формулами

Рассмотрим конечный алфавит $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Мы будем кодировать буквы и слова алфавита $\mathcal{A}$ $\{\to\}$-формулами от двух переменных. Для этого мы фиксируем уникальное переменное $p \in \mathcal{V}$ и введем обозначение

$$x \to_i x := ((x \to \underbrace{x) \to \ldots \to x)}_{i} \to x$$

для каждого $i \geq 1$. Таким образом, $x \to_1 x$ — это формула $(x \to x) \to x$ и $x \to_2 x$ — это формула $((x \to x) \to x) \to x$.

Кодом буквы a_i, $1 \leq i \leq m$, будем называть формулу:

$$\overline{a}_i[x] := x \to \big((p \to_i p) \to (p \to p)\big).$$

Далее иногда будем опускать зависимость кода от переменного x и записывать для краткости $\overline{a}_i$ вместо $\overline{a}_i[x]$.

Формулы A и B будем называть *совместными*, если существуют такие подстановки σ и π формул вместо переменных, что

$$\sigma A = \pi B.$$

В дальнейшем нам понадобиться следующая лемма.

Лемма 1. *Формулы* $\overline{a}[x]$ *и* $y \to \overline{b}[x]$ *несовместны для любых* $a, b \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Если бы формулы $\overline{a}[x]$ и $y \to \overline{b}[x]$ были совместны, то совместными оказались бы формулы $p \to p$ и $(p \to_i p) \to (p \to p)$, что невозможно ни для какого $i \geq 1$. Лемма доказана. □

Определим понятие *кода слова* $\alpha \in \mathcal{A}^+$ индукцией по длине слова $|\alpha|$. Если $|\alpha| = 1$, то $\alpha = a$ для некоторой буквы $a \in \mathcal{A}$ и код $\overline{\alpha}$ слова α совпадает с кодом $\overline{a}$ буквы a. Пусть $\alpha = \beta b$ для некоторых $\beta \in \mathcal{A}^+$ и $b \in \mathcal{A}$, тогда код $\overline{\alpha}$ слова α определяется соотношением:

$$\overline{\alpha}[x] := \overline{\beta}[\overline{b}[x]].$$

Для кодов слов также будем иногда использовать $\overline{\alpha}$ вместо $\overline{\alpha}[x]$.

Для таким образом определенного кодирования естественным образом задана операция конкатенации кодов слов:

$$\overline{\xi\zeta} = \overline{\xi}[\overline{\zeta}].$$

Кодом пустого слова ε будем считать формулу $\overline{\varepsilon}[x] := x$. Легко видеть, что такое определение кода пустого слова согласовано с тем, что оно является нейтральным элементом относительно операции конкатенации.

Исчисления, моделирующие решение проблемы соответствий Поста

Каждой конечной последовательности Π пар непустых слов в алфавите $\mathcal{A}$

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_\mu, \beta_\mu)$$

мы сопоставим итеративное исчисление P_Π, состоящее из следующих трех групп аксиом:

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{A}_1) & \overline{a}_i[x] & \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \\
(\mathrm{A}_2) & \big(\overline{\alpha}_j[x] \to \overline{\beta}_j[y]\big) \to (x \to y) & \forall j \in \{1, \ldots, \mu\}, \\
(\mathrm{A}_3) & \overline{a}_i[x] \to \overline{a}_i[x] & \forall i \in \{1, \ldots, m\}.
\end{array}$$

Далее мы покажем, что данное множество аксиом позволяет смоделировать процесс решения проблемы соответствия Поста для последовательности пар слов Π, т.е. существует формула, вывод которой в данном исчислении равносилен существованию решения для Π. Напомним, что решением проблемы соответствий Поста для последовательности пар слов Π является такое натуральное число $N \geq 1$ и такие индексы $i_1, \ldots, i_N \in \{1, \ldots, \mu\}$, для которых выполнено тождество

$$\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_N} = \beta_{i_1}\beta_{i_2}\ldots\beta_{i_N}.$$

Но для начала введем несколько обозначений и докажем вспомогательные леммы.

Выводимость вычислений

Первая вспомогательная лемма, которая понадобится нам далее, показывает, что из аксиомы (A_1) выводим код любого непустого слова в алфавите $\mathcal{A}$.

Лемма 2. $(\mathrm{A}_1) \vdash \overline{\alpha}$ *для любого* $\alpha \in \mathcal{A}^+$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по длине слова α. Пусть $\alpha = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ для некоторого $n \geq 1$. Если $n = 1$, то $\overline{\alpha}$ является аксиомой (A_1) и, следовательно, $(\mathrm{A}_1) \vdash \overline{\alpha}$.

Пусть $n > 1$ и утверждение леммы верно для слова $\gamma = a_{i_1} \ldots a_{i_{n-1}}$, т.е.

$$(\mathrm{A}_1) \vdash \overline{\gamma}.$$

Так как $\overline{\alpha} = \overline{\gamma}[\overline{a}_{i_n}]$, то с помощью операции суперпозиции из кода $\overline{\gamma}$ слова γ и аксиомы $\overline{a}_{i_n}$ выводим код $\overline{\alpha}$ слова α. Лемма доказана. □

Следующая лемма показывает, что аксиом (A_1) и (A_2) достаточно, чтобы смоделировать элементарный вывод в Π.

Лемма 3. *Если* $(\xi, \zeta) \xrightarrow{\Pi} (\alpha, \beta)$, *то* $P_\Pi, \overline{\alpha} \to \overline{\beta} \vdash \overline{\xi} \to \overline{\zeta}$.

Доказательство. Если $(\xi, \zeta) \xrightarrow{\Pi} (\alpha, \beta)$, то для некоторого $i \in \{1, \ldots, \mu\}$ выполнено

$$\alpha = \alpha_i \xi \ \text{ и } \ \beta = \beta_i \zeta.$$

Следовательно, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_i[\overline{\xi}]$ и $\overline{\beta} = \overline{\beta}_i[\overline{\zeta}]$.

Согласно лемме 2 из аксиомы (A_1) выводимы коды $\overline{\xi}$ и $\overline{\zeta}$ слов ξ и ζ соответственно. Поэтому с помощью операции суперпозиции из аксиомы (A_2) выводима формула

$$\big(\overline{\alpha}_i[\overline{\xi}] \to \overline{\beta}_i[\overline{\zeta}]\big) \to (\overline{\xi} \to \overline{\zeta}).$$

Тогда непосредственной проверкой убеждаемся, что с помощью операции *modus ponens* из данной формулы и формулы $\overline{\alpha} \to \overline{\beta}$ выводима формула $\overline{\xi} \to \overline{\zeta}$. Лемма доказана. $\square$

Используя индуктивное определение вывода в Π и лемму 3, несложно убедиться, что исчисление P_Π позволяет моделировать любой вывод в Π.

Следствие 2. *Если* $(\xi, \zeta) \overset{\Pi}{\Longrightarrow} (\alpha, \beta)$*, то* $P_\Pi, (\overline{\alpha} \to \overline{\beta}) \ \vdash \ (\overline{\xi} \to \overline{\zeta})$.

Вычисление выводимых формул

Для произвольной пары слов (α, β) в алфавите $\mathcal{A}$ обозначим через $P_{(\alpha,\beta)}$ множество кодов пар слов, из которых выводима пара (α, β):

$$P_{(\alpha,\beta)} := \{\overline{\xi} \to \overline{\zeta} \mid (\xi, \zeta) \overset{\Pi}{\Longrightarrow} (\alpha, \beta)\}.$$

Ясно, что $\overline{\alpha} \to \overline{\beta} \in P_{(\alpha,\beta)}$.

Для произвольной формулы A обозначим через A^* множество подстановочных вариантов формулы A, т.е.

$$A^* := \{\sigma A \mid \sigma \text{ — подстановка формул вместо переменных}\}.$$

Для произвольного множества формул M положим

$$M^* := \bigcup_{A \in M} A^*.$$

Также определим множество

$$P_{\mathcal{V}} := \{(x \to_i x) \to (x \to x) \mid i \geq 1,\ x \in \mathcal{V}\}.$$

Следующая лемма описывает множество выводимых в исчислении P_Π формул.

Лемма 4. $[P_\Pi \cup \{\overline{\alpha} \to \overline{\beta}\}] \subseteq P_\Pi^* \cup P_{(\alpha,\beta)}^* \cup P_{\mathcal{V}}^* \cup \mathcal{V}$.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по длине вывода n. Если $n = 0$, то имеют место включения

$$P_\Pi \subseteq P_\Pi^* \quad \text{и} \quad \overline{\alpha} \to \overline{\beta} \in P_{(\alpha,\beta)}^*.$$

Пусть утверждение леммы верно для $n \geq 1$, докажем его для $n+1$. Поскольку правая часть включения замкнута относительно операции суперпозиции, то достаточно рассмотреть только случай применения операции *modus ponens*. Рассмотрим произвольную формулу B, длина вывода которой равна $n+1$, и пусть формулы A и $A \to B$ имеют вывод в $P_\Pi \cup \{\overline{\alpha} \to \overline{\beta}\}$, длина которого не превосходит n для некоторой формулы A.

Если $A \to B \in P_{(\alpha,\beta)}^*$, то формула B есть подстановочный вариант кода некоторого слова в алфавите $\mathcal{A}$. Несложно убедиться, что данное слово не может быть пустым, т.к. в противном случае длина вывода B была бы меньше $n+1$, что противоречит выбору формулы B. Следовательно, B является подстановочным вариантом аксиомы (A_1).

Поскольку A не является формулой вида $(x \to_i x)$ ни для какого $i \geq 1$, то $A \to B \notin P_{\mathcal{V}}^* \cup \mathcal{V}$. Поэтому $A \to B \in P_\Pi^*$ и остается рассмотреть только следующие три случая:

Случай 1. $A \to B$ — это подстановочный вариант аксиомы (A_1), тогда $B \in P^*_{\mathcal{V}}$.

Случай 2. $A \to B$ — это подстановочный вариант аксиомы (A_2). Несложной проверкой убеждаемся, что $A \in P^*_{(\alpha,\beta)}$. Поэтому A является подстановочным вариантом формулы

$$\overline{\alpha}_i[\overline{\xi}] \to \overline{\beta}_i[\overline{\zeta}]$$

для некоторых слов $\xi, \zeta \in \mathcal{A}^*$ и $i \in \{1, \ldots, \mu\}$ таких, что

$$(\alpha_i\xi, \beta_i\zeta) \stackrel{\Pi}{\Longrightarrow} (\alpha, \beta).$$

Тогда B является подстановочным вариантом формулы $\overline{\xi} \to \overline{\zeta}$, причем $(\xi, \zeta) \xrightarrow{\Pi} (\alpha_i\xi, \beta_i\zeta)$. Следовательно, $B \in P^*_{(\alpha,\beta)}$.

Случай 3. $A \to B$ — это подстановочный вариант аксиомы (A_3), тогда $A = B$, что противоречит выбору формулы B.

Данные случаи исключают все возможные варианты. Лемма доказана. □

Как следствие из Леммы 4 имеем.

Следствие 3. *Если* $P_\Pi, \overline{\alpha} \to \overline{\beta} \ \vdash \ \overline{\xi} \to \overline{\zeta}$, *то* $(\xi, \zeta) \stackrel{\Pi}{\Longrightarrow} (\alpha, \beta)$.

Доказательство. Если $P_\Pi, \overline{\alpha} \to \overline{\beta} \ \vdash \ \overline{\xi} \to \overline{\zeta}$, то согласно Лемме 4 выполнено

$$\overline{\xi} \to \overline{\zeta} \in P^*_\Pi \cup P^*_{(\alpha,\beta)} \cup P^*_{\mathcal{V}} \cup \mathcal{V}.$$

Если слова ξ, ζ непустые, то $\overline{\xi} \to \overline{\zeta} \notin P^*_\Pi$ по Лемме 1. Если хотя бы одно из слов ξ, ζ пустое, то $\overline{\xi} \to \overline{\zeta} \notin P^*_\Pi$ выполнено согласно выбранному способу кодирования букв и слов формулами. Легко убедиться, что также выполнено

$$\overline{\xi} \to \overline{\zeta} \notin P^*_{\mathcal{V}} \cup \mathcal{V}.$$

Значит, $\overline{\xi} \to \overline{\zeta} \in P^*_{(\alpha,\beta)}$ и, следовательно, $(\xi, \zeta) \stackrel{\Pi}{\Longrightarrow} (\alpha, \beta)$ согласно определению множества $P_{(\alpha,\beta)}$. Следствие доказано. □

Сведение проблемы соответствий Поста

Объединяя Следствия 2 и 3 мы приходим к следующей ключевой лемме.

Лемма 5. $(\xi, \zeta) \stackrel{\Pi}{\Longrightarrow} (\alpha, \beta) \ \Leftrightarrow \ P_\Pi, \overline{\alpha} \to \overline{\beta} \ \vdash \ \overline{\xi} \to \overline{\zeta}$.

Следующая теорема описывает формальное сведение проблемы соответствий Поста для последовательности Π к проблеме вывода формул в итеративном исчислении P_Π.

Теорема 4. $\Pi\!\downarrow$ *тогда и только тогда, когда* $P_\Pi \ \vdash \ (x \to x)$.

Доказательство. По определению проблема соответствий Поста для входной последовательности Π имеет решение, если

$$(\varepsilon, \varepsilon) \overset{\Pi}{\Longrightarrow} (\gamma, \gamma)$$

для некоторого непустого слова $\gamma \in \mathcal{A}^+$. По Лемме 5 данное условие равносильно выводимости

$$P_\Pi, \overline{\gamma} \to \overline{\gamma} \vdash x \to x.$$

Поскольку формула $\overline{\gamma} \to \overline{\gamma}$ выводима в P_Π для любого непустого слова $\gamma \in \mathcal{A}^+$, мы получаем, что проблема соответствий Поста для входной последовательности Π имеет решение тогда и только тогда, когда $P_\Pi \vdash (x \to x)$. Теорема доказана. $\square$

Как следствие из Теорем 3 и 4 мы имеем доказательство Теоремы 1.

Список литературы

[1] *Боков Г. В.* Итеративные пропозициональные исчисления. // Интеллектуальные системы, т. 18, № 4, с. 99–106, 2014.

[2] *Кудрявцев В. Б.* Функциональные системы. — Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1982.

[3] *Кузнецов А. В.* Неразрешимость общих проблем полноты, разрешимости и эквивалентности для исчислений высказываний. // Алгебра и логика, т. 2, № 4, с. 47-66, 1963.

[4] *Кузнецов А. В.* Аналоги "штриха Шеффера"в конструктивной логике. // ДАН СССР, т. 160, № 2, с. 274–277, 1965.

[5] *Кузнецов А. В.* О функциональной выразимости в суперинтуиционистских логиках. // Матем. исследования, т. 6, № 4, с. 75–122, 1971.

[6] *Кузнецов А. В.* О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости. // Логический вывод. М., Наука, с. 5–33, 1979.

[7] *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — Москва, Наука, 1965.

[8] *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста. // Алгебра и логика, т. 5, № 2, с. 5–24, 1966.

[9] *Bokov Grigoriy V.* Undecidability of the problem of recognizing axiomatizations for propositional calculi with implication. // Logic Journal of the IGPL, vol. 23, no. 2, p. 341–353, 2015.

[10] *Bokov Grigoriy V.* Undecidable problems for propositional calculi with implication. // Journal of Symbolic Logic, Received 3 February 2015.

[11] *Citkin Alexander* A mind of a non-countable set of ideas. // Logic and Logical Philosophy, vol. 17, p. 23–39, 2008.

[12] *Linial Samuel, Post Emil L.* Recursive unsolvability of the deducibility, Tarski's comleteness, and independence of axioms problems of the propositional calculus. // Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 55, p. 50, 1949.

[13] *Post Emil L.* Formal reduction of the general combinatorial decision problem. // American Journal of Mathematics, vol. 65, p. 197–215, 1943.

[14] *Post Emil L.* A variant of a recursively unsolvable problem. // Bull. Amer. Math. Soc., vol. 52, no. 4, p. 264–268, 1946.

[15] *Sinaceur Hourya* Address at the Princeton University bicentennial conference on problems of mathematics (December 17–19, 1946), by Alfred Tarski.. // Bulletin of Symbolic Logic, vol. 6, no. 1, p. 1-44, 2000.